

L3 MAF  
Examen janvier 2016.  
Corrigé

Exo 1 1.  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma/\alpha \\ 0 & 0 & -\beta/\alpha \\ 0 & -\delta/\alpha & 0 \end{pmatrix}$

2.  $\det(J - \lambda I) = -\lambda \left( \lambda^2 - \frac{\beta\delta}{\alpha^2} \right)$

$$\rho(J) = \frac{\sqrt{|\beta\delta|}}{|\alpha|}$$

3. CNS  $\rho(J) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{|\beta\delta|} < |\alpha|$

NB. La propriété de diagonale dominante fournit une CS

$$|\alpha| > \max\{|\beta|, |\delta|, |\gamma|\}$$

Exo. 2 1.  $x_{k+1} = Bx_k + C$

$$B = M^{-1}N = I - \gamma A$$

CNS:  $\rho(B) < 1 \Leftrightarrow |\mu| < 1 \quad \forall \mu \in \text{spec } B$

$$\mu \in \text{spec } B \Leftrightarrow \mu = 1 - \gamma\lambda, \quad \lambda \in \text{spec } A$$

$$\Rightarrow \text{CNS: } |1 - \gamma\lambda| < 1 \quad \forall \lambda \in \text{spec } A$$

2.  $A$  sym. déf. positive  $\Rightarrow \lambda > 0 \quad \forall \lambda \in \text{spec } A$

Soit  $\gamma_0 = 2/\rho(A) > 0 : -1 < 1 - \gamma_0\lambda < 1 \quad \forall \lambda \in \text{spec } A$

d'où  $-1 < 1 - \gamma\lambda < 1 \quad \forall \gamma \in ]0, \gamma_0[$

CNS  $\rho(B) < 1 \Leftrightarrow \gamma \in ]0, \gamma_0[$

Exo. 3 1. la dernière ligne du système  $Mx = b$  :  
 $1=0$  ! impossible, pas de solution -

2. Solution aux M.C.  $M^T M x = M^T b$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de solution  $x = (-1 \ 0)^T$ .

3. DVS de  $M = V \Sigma U^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4  $M^+ = U \Sigma^+ V^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5  $M^+ b = (-1 \ 0)^T$  id° à quest 2.

Exo 4. 1.  $f'(x) = 1 - \frac{1}{5} \cos x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc  $f$  est strictement croissante. De plus

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

donc  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bijection. L'équation

$f(x) = 0$  admet donc une et une seule solution.

## Méthode de point fixe

$$2. \quad f'(x) = \frac{1}{5} \cos x \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| = \frac{1}{5}$$

Par le thm des accréissements finis

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \sup_{\xi} |\phi'(\xi)| |x - y|$$

$$\leq \frac{1}{5} |x - y|$$

donc  $\phi$  contraction de rapport  $\frac{1}{5}$

3 D'après le thm de point fixe d'une application contractante (Picard - Banach) la suite  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  converge vers l'unique point  $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ .

$$4. \quad |x_n - \bar{x}| = |\phi(x_{n-1}) - \phi(\bar{x})| \leq \frac{1}{5} |x_{n-1} - \bar{x}| \\ \leq \dots \leq \frac{1}{5^n} |x_0 - \bar{x}|.$$

## Méthode de Newton

$$5. \quad \text{Comme } f'(x) = 1 - \frac{1}{5} \cos x > 0 \quad \forall x$$

$$\text{Itération de Newton } y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

est toujours bien définie (le dénominateur  $\neq 0$ )

6 - On applique le thm du cours. Soit

$$M = \sup_{x, y \in \mathbb{R}} \frac{|f''(x)|}{|f'(y)|}$$

$$\max_x |f''(x)| = \max_x \left| \frac{1}{5} \sin x \right| = \frac{1}{5}$$

$$\min_y |f'(y)| = \min_y \left| 1 - \frac{1}{5} \cos y \right| = \frac{4}{5}$$

$$M = \frac{1}{4}$$

Si  $0 < l < \frac{2}{M} = 8$  alors  $\forall \beta \in [\bar{x}-l, \bar{x}+l]$

la suite de Newton converge vers  $\bar{x}$ .

7 - On a  $y_{n+1} - \bar{x} = y_n - \bar{x} + \frac{f(\bar{x}) - f(y_n)}{f'(y_n)}$

$$f(\bar{x}) = f(y_n) + f'(y_n)(\bar{x} - y_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(\bar{x} - y_n)^2$$

avec  $\xi \in ]\bar{x}, y_n[$  d'où

$$y_{n+1} - \bar{x} = \frac{1}{2} (\bar{x} - y_n)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(y_n)}$$

$$|y_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{M}{2} |\bar{x} - y_n|^2 \leq \frac{1}{8} |y_n - \bar{x}|^2$$

8 - La méthode du point fixe a une vitesse de convergence égale à 1 (convergence géométrique) alors que la méthode de Newton a une



relève de convergence de 2 (convergence quadra-  
tique) donc plus rapide. La courbe partiel est  
une courbante sur la condition initiale. On peut  
demander par des itérations de point fixe et per-  
suivre par l'algorithme de Newton.